第 10卷 第 28期 2010年 10月
1671— 1815(2010)28-7221-02

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

Vol. 10 No. 28 Oct. 2010
© 2010 Sci. Tech. Engng.

研究简报

数学

一个 Smarandache可乘函数及其均值

张 拓

(陕西财经职业技术学院基础部,咸阳 712000)

摘 要 对任意正实数 m,定义函数 $U_m(n)$: $U_m(1)=1$。对任意素数 p及正整数 α,定义 $U_m(p^\alpha)=p^\alpha+m$;当正整数 n的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$时,定义 $U_m(n)=U_m(p_1^{\alpha_1})\cdots U_m(p_k^{\alpha_k})$,利用初等方法和解析方法,研究了新定义的数论函数 $U_m(n)$的均值性质,并给出这个数论函数均值的一个较强的渐近公式。

关键词 Smarandache可乘函数 $U_m(n)$ 均值 渐近公式

中图法分类号 O156.4; 文献标志码 A

对任意正实数 m,我们定义函数 $U_m(n)$如下:

$U_m(1)=1$;对任意素数 p及正整数 α,定义 $U_m(p^\alpha)=p^\alpha+m$;当正整数 n的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$时,定义 $U_m(n)=U_m(p_1^{\alpha_1})\cdots U_m(p_k^{\alpha_k})$。

这样定义的数论函数 $U_m(n)$显然是可乘的,但不是完全可乘函数。利用解析方法研究 $U_m(n)$的均值性质,并给出一个较强的渐近公式。即就是证明了下面的定理。

定理 对任意实数 $x>1$,有渐近公式

$$\sum_{n\le x}U_m(n)=\frac{1}{2}x^2\prod_p\left(1+\frac{m}{p(p+1)}\right)+O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right)。$$

1 定理的证明

为了完成定理的证明,我们先叙述一个简单的引理,即著名的 Perron公式[1]。

引理 1 设 $A(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)n^{-s}$,$\sigma_a<+\infty$。再设存在递增函数 $H(u)$及函数 $B(u)$使得

$$|a(n)|\le H(n),\quad n=1,2,\cdots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a(n)|n^{-\sigma}\le B(\sigma),\quad \sigma>\sigma_a。$$

对任意的 $s_0=\sigma_0+it_0$及 $b_0>\sigma_a$当 $b_0\ge b>0$,$b_0\ge\sigma_0+b>\sigma_a$,$T\ge1$及 $x\ge1$时有:

1) $x\ne$正整数时,

$$\sum_{n\le x}a(n)n^{-s_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}A(s_0+s)\frac{x^s}{s}ds+O\left(\frac{x^bB(b+\sigma_0)}{T}\right)+O\left(x^{1-\sigma_0}H(2x)\min\left(1,\frac{\lg x}{T}\right)\right)+O\left(x^{-\sigma_0}H(N)\min\left(1,\frac{x}{T\|x\|}\right)\right)。$$

其中 N是离 x最近的整数(x半奇数时,取 $N=x-\frac{1}{2}$),$\|x\|=|N-x|$。

2) $x=$正整数 N时,

$$\sum_{n\le x}a(n)n^{-s_0}+\frac{1}{2}a(N)N^{-s_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}A(s_0+s)\frac{N^s}{s}ds+O\left(\frac{N^bB(b+\sigma_0)}{T}\right)+O\left(N^{1-\sigma_0}H(2N)\min\left(1,\frac{\lg N}{T}\right)\right)。$$

2010年月日收到 国家自然科学基金项目(10671155)、陕西省自然科学基金项目(SJ08A28)资助

作者简介:张 拓(1957—),男,陕西咸阳人,副教授,研究方向:基础数论。

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

有了这个引理,我们容易给出定理的证明。事实上对任意复数 $s(\mathrm{Re}s>2)$,设

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U_m(n)}{n^s}。$$

由 Euler积公式[2]有

$$f(x)=\prod_p\left(1+\frac{U_m(p)}{p^s}+\cdots+\frac{U_m(p^n)}{p^{ns}}+\cdots\right)=$$

$$\prod_p\left(1+\frac{p+m}{p^s}+\frac{p^2+m}{p^{2s}}+\cdots+\frac{p^n+m}{p^{ns}}+\cdots\right)=$$

$$\prod_p\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^{s-1}}}+\frac{\frac{m}{p^s}}{1-\frac{1}{p^s}}\right)=\zeta(s-1)\times$$

$$\prod_p\left[1+\frac{\frac{m}{p^s}\left(1-\frac{1}{p^{s-1}}\right)}{\left(1-\frac{1}{p^s}\right)}\right]。$$

其中 $\zeta(s)$为 Riemann Zeta函数,并在 $s=1$处有1阶极点,留数为 1,而 $f(s)\frac{x^s}{s}$在 $s=2$处有 1阶极点,留数为

$$\frac{1}{2}x^2\prod_p\left(1+\frac{m}{p(p+1)}\right)。$$

在引理中取 $b=\frac{5}{2}$, $T>2$,可得

$$\sum_{n\leqslant x}U_m(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{5}{2}-iT}^{\frac{5}{2}+iT}f(s)\frac{x^s}{s}ds+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{T}\right)。$$

将上式积分线移至 $\mathrm{Re}s=\frac{3}{2}+\varepsilon$处,并取 $T=x$,于是有

$$\sum_{n\leqslant x}U_m(n)=\frac{1}{2}x^2\prod_p\left(1+\frac{m}{p(p+1)}\right)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}+\varepsilon-iT}^{\frac{3}{2}+\varepsilon+iT}f(s)\frac{x^s}{s}ds+$$

$$O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right)=\frac{1}{2}x^2\prod_p\left(1+\frac{m}{p(p+1)}\right)+$$

$$O\left(\int_{-T}^{T}\left|f\left(\frac{3}{2}+\varepsilon+it\right)\frac{x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}}{1+|t|}\right|dt\right)+O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right)=$$

$$\frac{1}{2}x^2\prod_p\left(1+\frac{m}{p(p+1)}\right)+O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right)。$$

这就完成了定理的证明。

当 $m=1$时,注意到

$$\prod_p\left(1+\frac{1}{p(p+1)}\right)=\prod_p\left(\frac{p^2+p+1}{p(p+1)}\right)=$$

$$\prod_p\left(\frac{p^3-1}{p(p^2-1)}\right)=$$

$$\prod_p\left(\frac{1-\frac{1}{p^3}}{1-\frac{1}{p^2}}\right)=\frac{\zeta(2)}{\zeta(3)}。$$

由此,可得推论。

参 考 文 献

1 Pan Chengdong, Pan Chengbiao. Foundation of analytic number theory. Beijing: Science Press, 1997

2 Apstol T M. Introduction to analytic number theory. New York: Spring-Verlag, 1976

A New Arithmetical Function and Its Mean Value

ZHANG Tuo

(Department of Basis, Shanxi Technical College of Finance & Economics, Xianyang 712000, P. R. China)

[Abstract] Let m be a positive integer, defined function: $U_m(n)$: $U_m(1)=1$, for any prime number p and a positive integer α, defined $U_m(p^\alpha)=p^\alpha+m$, when n is the standard decomposition type integer $n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$, defined $U_m(n)=U_m(p_1^{\alpha_1})\cdots U_m(p_k^{\alpha_k})$, uses the primary method and the analysis method. The research is similar in a new define arithmetical function $U_m(n)$ the mean value nature, and an asymptotic formula on its mean value is given.

[Key words] smarandache multiplicative function $U_m(n)$ mean value asymptotic formula

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net